HÀ VĂN CHƯƠNG
(GV chuyên Toán Trung tâm luyện thi Vĩnh Viễn - TP. Hồ Chí Minh)

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

TÍCH PHÂN & SỐ PHỨC

LUYỆN THI TÚ TÀI, ĐẠI HỌC

HƯƠNG TRÌNH MỚI NHẤT CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

(Tái bả
lần thứ n
có sửa c
bổ sun

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀ VĂN CHƯƠNG
(GV chuyên Toán Trung tâm luyện thi Vĩnh Viễn – TP. Hồ Chí Minh)

PHƯƠNG PHÁP TÍNH
TÍCH PHÂN VÀ SỐ PHỨC

• LUYỆN THI TÚ TÀI VÀ ĐẠI HỌC
• CHƯƠNG TRÌNH MỚI NHẤT CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

(Tái bản lần thứ nhất, có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TÍCH PHÂN

Chương 1

HỌ NGUYÊN HÀM

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa

F(x) là nguyên hàm của f(x) trên khoảng (a; b) nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in (a; b)$ kí hiệu $F(x) = \int f(x)dx$.

II. Tính chất

a) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

c) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad k \in R$

d) Nếu F(t) là một nguyên hàm của f(x) thì F(u(x)) là một nguyên hàm của f [u(x)] u'(x).

III. Bảng nguyên hàm thường dùng với u = u(x)

1. $\int du = u + C$
2. $\int u^{n}du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
4. $\int e^{u}du = e^{u} + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \sin u du = -\cos u + C$
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int (1 + \tan^2 u)du = \tan u + C$
8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int (1 + \cot^2 u)du = -\cot u + C$
9. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

1 Tính đạo hàm của F(x) = x.lnx – x, rồi suy ra nguyên hàm của f(x) = lnx.

Giải

Ta có : $F(x) = x.\ln x - x = x(\ln x - 1)$

Suy ra : $F'(x) = [x(\ln x - 1)]' = \ln x - 1 + \frac{x}{x} = \ln x$

Vậy theo định nghĩa của nguyên hàm, nguyên hàm của $f(x) = \ln x$ chính là $F(x) = x\ln x - x + C$.

2 Tính đạo hàm của $F(x) = x^2\ln x$, rồi suy ra nguyên hàm của $f(x) = 2x\ln x$.

Giải

Ta có : $F(x) = x^2\ln x$ nên $F'(x) = 2x\ln x + \frac{1}{x}.x^2 = 2x\ln x + x = f(x) + x$

Vậy $\int F'(x)dx = \int f(x)dx + \int dx$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = F(x) - \frac{x^2}{2} + C = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C$$

Vậy một nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x) = x^2.\ln x - \frac{x^2}{2}$.

3 Tính nguyên hàm của $f(x) = x\sqrt{x+1}$ biết $F(0) = 2$.

Giải

Ta có : $f(x) = x\sqrt{x+1} = (x+1-1)\sqrt{x+1}$

$$= (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

Vậy $\int f(x)dx = \int (x+1)^{\frac{3}{2}}dx - \int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$$= \int (x+1)^{\frac{3}{2}}d(x+1) - \int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)$$

$$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$$

Hay $F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C$

Vì $F(0) = 2$ nên ta có : $2 = \frac{2}{5}(0+1)^2\sqrt{0+1} - \frac{2}{3}(0+1)\sqrt{0+1} + C$

$$2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{34}{15}$$

Vậy $F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{34}{15}$.

4 Cho $F(x) = x\ln x\left(\frac{x}{4}\right)$ và $g(x) = x^2\ln\left(\frac{x}{4}\right)$; $x > 0$.

1. Chứng tỏ rằng : $f(x) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2}x$.

2. Suy ra một nguyên hàm F(x) của f(x).

Giải

1. Ta có : $g'(x) = 2x\ln\left(\frac{x}{4}\right) + x$ (do $x > 0$)

Suy ra : $2x\ln\left(\frac{x}{4}\right) = g'(x) - x \Rightarrow x\ln\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2}x$

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{2}x$ (*)

2. Từ (*) ta suy ra :

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int g'(x)dx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}g'(x) - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + C$$

Vậy một nguyên hàm của f(x) là : $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x^2}{4}$.

5 **1.** Chứng minh rằng $F(x) = 9 + (x - 2)e^x$ là một nguyên hàm của $f(x) = (x - 1)e^x$.

2. Chứng minh rằng $G(x) = -(1 + x)e^{-x}$ là một nguyên hàm của $g(x) = x.e^{-x}$. Rồi suy ra nguyên hàm của $k(x) = (x - 1)e^{-x}$.

Giải

1. Ta có : $F'(x) = e^x + e^x(x - 2) = e^x(x - 1) = f(x)$

Vậy F(x) là một nguyên hàm của f(x).

2. Ta có : $G(x) = -(1 + x)e^{-x}$

Suy ra : $G'(x) = -e^{-x} + (1 + x)e^{-x} = e^{-x}.x = g(x)$

Vậy G(x) là một nguyên hàm của g(x).

Suy ra nguyên hàm của $k(x) = (x - 1)e^{-x} = xe^{-x} - e^{-x} = g(x) - e^{-x}$

Nên $\int k(x)dx = \int g(x)dx - \int e^{-x}dx = G(x) + e^{-x} + C$

$= -(1 + x)e^{-x} + e^{-x} + C = -xe^{-x} + C$

Vậy nguyên hàm của k(x) là $K(x) = -xe^{-x} + C$.

6 Tính đạo hàm của $\varphi(x) = (ax + b)e^x$. Rồi suy ra nguyên hàm của $f(x) = -xe^x$.

Giải

Từ giả thiết $\varphi(x) = (ax + b)e^x$

Suy ra : $\varphi'(x) = (a + ax + b)e^x$

Để tính nguyên hàm của $f(x) = -xe^x$ ta chọn $a = -1$, $b = 1$

Thì $\varphi(x) = (-x + 1)e^x \Rightarrow \varphi'(x) = -xe^x$

Vậy nguyên hàm của $f(x) = -xe^x$ là $F(x) = (-x + 1)e^x + C$.

7 Chứng minh $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + K}\right|$ là một nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + K}} \text{ trên R.}$$

Giải

Ta có : $$F'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 + K})'}{x + \sqrt{x^2 + K}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + K}}}{x + \sqrt{x^2 + K}} = \frac{\sqrt{x^2 + K} + x}{\sqrt{x^2 + K}(x + \sqrt{x^2 + K})}$$

Suy ra : $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + K}} = f(x) \quad \forall x \in R.$

Do đó : F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên R.

8 Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{3 - x}$ với $x \le 3$.

Tìm các số a, b sao cho hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - x}$ là một nguyên hàm của f(x).

Đại học Sư phạm Kĩ thuật TP.HCM

Giải

Ta có : $$F'(x) = (2ax + b)\sqrt{3 - x} - \frac{1}{2\sqrt{3 - x}}(ax^2 + bx + c).$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3 - x}}[(2ax + b).2(3-x) - (ax^2 + bx + c)]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3 - x}}[-5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c)]$$

F(x) là một nguyên hàm của f(x) khi $x \le 3$

$\Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \le 3$

$\Leftrightarrow \quad -5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c = 2(3 - x)x \quad \forall x \le 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5a = -2 \\ 12a - 3b = 6 \\ 6b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = -\dfrac{2}{5} \\ c = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

9 Chứng minh $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ với $a > 0$ là một nguyên hàm của

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2} \quad \text{với } \forall x \neq \pm a.$$

Giải

Ta có : $F'(x) = \dfrac{1}{2a}.\dfrac{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)'}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)} = \dfrac{1}{2a}.\dfrac{\dfrac{2a}{(x+a)^2}}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)} \quad \forall x \neq \pm a.$

Suy ra : $F'(x) = \dfrac{1}{2a}.\dfrac{2a}{(x+a)^2}.\dfrac{x+a}{x-a} \quad \forall x \neq \pm a$

$$F'(x) = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{x^2 - a^2} = f(x)$$

Vậy $F'(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ với $\forall x \neq \pm a$.

10 Chứng minh $F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ là nguyên hàm của

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Giải

* Khi $x \neq 0$ thì $F'(x) = \dfrac{e^x.x - (e^x - 1).1}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x^2} = f(x)$

Vậy $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (1)

* Khi $x = 0$ thì $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$

$\Rightarrow \quad F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{2x}$

Vậy $\quad F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2} = f(0)$ (Quy tắc L'Hopital) (2)

Từ (1), (2), ta suy ra F(x) là nguyên hàm của f(x) trên R.

11 Tính đạo hàm của $F(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x|$.

Suy ra nguyên hàm của $f(x) = x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2$.

Giải

Ta có : $\quad F(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x|$

Suy ra $\quad F'(x) = 2x\ln|x + 1| + \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} - 2x\ln|x| - x$

$= 2x\ln|x + 1| - 1 - 2x\ln|x|$ với $x \neq 0, x \neq 1$ (*)

Ta có : $\quad f(x) = x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2 = x\ln\left|\dfrac{1+x}{x}\right|^2 = 2x\ln\left|\dfrac{1+x}{x}\right|$

$= 2x[\ln|1 + x| - \ln|x|] = 2x\ln|1 + x| - 2x\ln|x|$ (**)

Từ (*), (**) ta suy ra : $\quad f(x) = F'(x) + 1$

Suy ra $\quad \int f(x)dx = \int F'(x)dx + \int 1dx = F(x) + x + C$

Vậy nguyên hàm của $f(x) = x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2$ là :

$F(x) = (x^2 - 1)\ln|1 + x| - x^2\ln|x| + x + C.$

12 Tìm a, b, c sao cho $F(x) = e^{x\sqrt{2}}(a\tan^2 x + b\tan x + c)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^{x\sqrt{2}}.\tan^3 x$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Ta có :

$F'(x) = \sqrt{2}.e^{x\sqrt{2}}(a\tan^2 x + b\tan x + c) + e^{x\sqrt{2}}[2a(1 + \tan^2 x)\tan x + b(1 + \tan^2 x)]$

với $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

F(x) là nguyên hàm của f(x) trên $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow e^{x\sqrt{2}}\left[2a\tan^3 x + (\sqrt{2}a + b)\tan^2 x + (\sqrt{2}b + 2a)\tan x + (\sqrt{2}c + b)\right] = e^{x\sqrt{2}}\tan^3 x$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ \sqrt{2}a + b = 0 \\ \sqrt{2}b + 2a = 0 \\ \sqrt{2}c + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

13 Chứng minh $F(x) = |x| - \ln(1 + |x|)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

Đại học Tổng hợp TP.HCM – 1993

Giải

Ta có : $F(x) = \begin{cases} x - \ln(1 + x) & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -x - \ln(1 - x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Ta có : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \dfrac{x}{1 - x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Do đó, ta có :

* Khi $x > 0$ thì $F'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{x}{1 + x} = f(x)$ (1)

* Khi $x < 0$ thì $F'(x) = -1 + \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{x}{1 - x} = f(x)$ (2)

* Khi $x = 0$ thì $F'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \ln(1 + x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} - \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

Suy ra : $F'(0^+) = 1 - \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1 + x}$ (do quy tắc L'Hopital)

$\Rightarrow$ $F'(0^+) = 1 - 1 = 0$

Mặt khác : $F'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x - \ln(1-x)}{x}$

$$\Rightarrow \quad F'(0^-) = -1 - \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad F'(0^-) = -1 - \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-1}{1+x}}{1} = -1 + 1 = 0$$

Vậy $F'(0^+) = F'(0^-) = 0$ Nên $F'(0) = 0 = f(0)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra F(x) là nguyên hàm của f(x) trên R.

14 Chứng minh $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ là nguyên hàm của

$f(x) = \begin{cases} x\ln x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

Đại học Y dược TP.HCM

Giải

* Khi $x > 0$ ta có : $F'(x) = x\ln x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln x = f(x)$ (1)

* Khi $x = 0$ ta có : $F'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2}\ln x - \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2}{x}} - 0$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}} \quad \text{(quy tắc L'Hopital)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x}{2}\right) = 0 = f(x) \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta kết luận F(x) là nguyên hàm của f(x) trên $[0, +\infty)$.

15 Tính đạo hàm của hàm số $F(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{x^2 + 2\sqrt{x} + 1}\right)$.

Rồi suy ra họ nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$.